page 156 1/4 1992
E.N.S.A.E M' Mathe

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES

MAI 1992

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Il est demandé au candidat de souligner, dans chacune de ses réponses, le ou les points clés.

La clarté, la concision et la présentation seront des éléments importants d'appréciation.

Tout résultat énoncé dans une question pourra être utilisé, même sans avoir été démontré, dans la résolution des questions suivantes.

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, noté $(.,.)$. On supposera que E est complet pour la norme, notée $\|.\|$, associée au produit scalaire et définie par $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$, pour tout u dans E. Dans tout le problème, sauf la partie III, l'espace E sera supposé de dimension quelconque (finie ou infinie).

On rappelle que pour tout couple (x,y) d'éléments de E l'identité suivante, dite du parallélogramme, est satisfaite

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On rappelle également qu'un sous ensemble K de E est dit convexe si pour tout couple (x,y) d'éléments de K et pour tout λ dans $[0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y$ est un élément de K.

On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E. Soient A et B dans $L(E)$, on note AB la composée de A et de B, $Ker(A)$ le noyau de A et $Im(A)$, l'image de A. On dit qu'un élément A de $L(E)$ est auto-adjoint si pour tout couple (x,y) d'éléments de E on a $(Ax,y) = (x,Ay)$. On note $\leq$ la relation sur $L(E)$ définie comme suit: $A \leq B$ si et seulement si $((B-A)x,x) \geq 0$ pour tout x de E. On note I l'application identité de E dans E. Pour $A \in L(E)$, on note $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Pour $V \subset E$, on note $V^{\perp} = \{x \in E : \forall v \in V, (x,v) = 0\}$.

Partie I

1) Soit K un convexe, fermé, non vide de E, montrer que, pour tout u de E, il existe un

unique élément v de K tel que

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\|.$$

On note $v = P_K(u)$ et on dit que v est le projeté de u sur K. P_K est appelé projecteur sur K.

2) Montrer que pour $u \in E$, $P_K(u)$ est l'unique vecteur v de E vérifiant

$$v \in K \text{ et } \forall w \in K, (u - v, w - v) \leq 0.$$

3) Montrer que pour tout couple (u_1, u_2) d'éléments de E on a

$$\|P_K(u_1) - P_K(u_2)\| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

4) Soit M un sous espace vectoriel fermé de E, soit $u \in E$, montrer que $P_M(u)$ est l'unique vecteur v de E tel que

$$v \in M \text{ et } \forall w \in M, (u - v, w) = 0.$$

Montrer que $P_M \in L(E)$. P_M est appelé projecteur orthogonal sur M. On note $Proj(E)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux sur un sous espace vectoriel fermé de E.

5) Réciproquement, soit P une application de E dans E telle que pour tout x et tout y dans E on ait $(x - P(x), P(x) - P(y)) \geq 0$.

a) Soit $\overline{co}(P(E))$ le plus petit sous ensemble convexe fermé de E contenant $P(E)$, où $P(E) = \{P(x) : x \in E\}$, montrer que P est le projecteur sur $\overline{co}(P(E))$.

b) En déduire que $P(E)$ est convexe fermé et que P est alors le projecteur sur $P(E)$.

6) Soit $P \in L(E)$, montrer que $P \in Proj(E)$ si et seulement si P est auto-adjoint et $P^2 = P$.

7) Soit $P \in L(E)$, montrer que $P \in Proj(E)$ si et seulement si $\|P\| \leq 1$ et $P^2 = P$.

8) Montrer que si $P \in Proj(E)$ alors $Im(P) = Ker(P)^{\perp}$

Partie II

1) Soient P et Q dans $Proj(E)$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes,
(i) $Q - P \in Proj(E)$,
(ii) $P \leq Q$,
(iii) $Im(P) \subset Im(Q)$.

page 158 3/4 . 1992.
E.N.S.A.E M' Math 2

(iv) $QP = P$.
(v) $PQ = P$.
(vi) $QP + PQ = 2P$.

2) Soient P et Q dans $Proj(E)$. montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
(i) $P + Q \in Proj(E)$,
(ii) $\forall x \in E, (Px.Qx) = 0$,
(iii) $PQ = 0$,
(iv) $\forall x \in Im(P), \forall y \in Im(Q), (x.y) = 0$.
(v) $P + Q$ est le projecteur orthogonal sur $V = \overline{Im(P) + Im(Q)}$.

3) Soient P et Q dans $Proj(E)$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
(i) $PQ \in Proj(E)$,
(ii) $PQ = QP$,
(iii) PQ est le projecteur orthogonal sur $V = Im(P) \cap Im(Q)$.

4) Soient P et Q dans $Proj(E)$. montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
(i) $P + Q - PQ \in Proj(E)$.
(ii) $PQ = QP$,
(iii) $P + Q - PQ$ est le projecteur orthogonal sur $V = \overline{Im(P) + Im(Q)}$.

Partie III

On suppose dans cette partie que E est **de dimension finie**. On se propose de montrer, dans cette partie, que le projecteur orthogonal G sur $Im(P) \cap Im(Q)$ vérifie, pour tout x de E, $\lim_{n-\infty} \|Gx - (QP)^n x\| = 0$.

1) Soient P et Q deux éléments de $Proj(E)$. Montrer que $PQ = QP$ si et seulement si P et Q admettent une base orthonormée commune de vecteurs propres.

2) On pose $A = PQP$,

a) Montrer que A est autoadjoint, que $\|A\| \leq 1$ et que $A \geq 0$.

b) Montrer que pour tout entier n et tout x de E,

$$0 \leq (A^{n+1}x.x) \leq (A^n x.x).$$

c) Déduire de b) que pour tout x et tout y de E, $\lim_{n-\infty} (A^n x.y)$ existe. On note $\phi(x,y)$ cette limite.

d) Montrer que ϕ ainsi définie est bilinéaire et en déduire qu'il existe un unique élément G de $L(E)$, tel que $\phi(x,y) = (Gx.y)$ pour tout x et tout y dans E.

e) En déduire que pour tout x de E, $\lim_{n-\infty} \|Gx - (PQP)^n x\| = 0$.

3) On se propose de montrer, dans cette question, que G est le projecteur orthogonal sur $Im(P) \cap Im(Q)$.

a) Montrer que G est un projecteur orthogonal.

b) Montrer que $Im(P) \cap Im(Q) \subset Im(G)$.

c) Montrer que $PG = G$.

d) Montrer que $QG = G$ (on montrera tout d'abord que $(PQP)^n QG = G$).

e) Montrer que $Im(G) \subset Im(P) \cap Im(Q)$ et conclure.

4) Déduire des résultats précédents que, pour tout x de E, $\lim_{n-\infty} \|Gx - (QP)^n x\| = 0$ et $\lim_{n-\infty} \|Gx - (PQ)^n x\| = 0$.

5) Soit $V = Im(P) + Im(Q)$, montrer que le projecteur orthogonal P_V sur V vérifie, pour tout x de E,

$$\lim_{n-\infty} \|P_V x - x + [(I-P)(I-Q)]^n x\| = 0.$$

Montrer que ceci généralise le résultat de la question II-4.

Partie IV

On ne suppose plus que E est de dimension finie.

1) Soit $(A_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments autoadjoints de $L(E)$ et α un réel positif tels que pour tout n, $A_n \leq A_{n+1}$ et $\|A_n\| \leq \alpha$. On admettra que pour tout élément autoadjoint, B, de $L(E)$ vérifiant $B \geq 0$ on a, pour tout x de E,

$$\|Bx\|^4 \leq (Bx, x)(B^2 x, Bx).$$

a) Montrer qu'il existe un réel positif k tel que, pour tout x de E et pour tout couple d'entiers (n, m) avec $n > m$,

$$\|(A_n - A_m)x\|^4 \leq k[(A_n x, x) - (A_m x, x)]\|x\|^2.$$

b) En déduire que la suite $A_n x$ est de Cauchy dans E.

c) Montrer qu'il existe A dans $L(E)$, autoadjoint, tel que $\lim_{n-\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$, pour tout x de E.

2) Soit $(V_n)_{n\in N}$ une suite de sous espaces fermés de E telle que pour tout entier n, $V_n \subset V_{n+1}$. On pose $V = \overline{\cup_{n\in N} V_n}$. Montrer que pour tout x de E, $\lim_{n-\infty} \|P_V x - P_{V_n} x\| = 0$.

3) Sous les hypothèses de la question IV-1, montrer que $\|A_n - A\|$ ne converge pas vers 0 en général.

INSEE C210.0172.92.0